

Точные решения в электрогидродинамике и электростатике жидкостей со свободной поверхностью

Доктор физико-математических наук Зубарев Николай Михайлович
(Институт электрофизики УрО РАН)

Наиболее интересные проблемы электрогидродинамики жидкостей со свободной поверхностью связаны с существенными изменениями геометрии системы (формированием капель, пузырей) и образованием особенностей (острий, заостренных лунок). С подобными ситуациями мы сталкиваемся, рассматривая эволюцию жидкостей с различными физическими свойствами в электрическом поле. Взаимодействие поля и индуцированных им зарядов на поверхности проводящих или диэлектрических жидкостей приводит к взрывному росту возмущений границы. Особенностью теоретического рассмотрения подобных процессов является то, что их невозможно описать в рамках линейных моделей. Линейными процессами в задачах, связанных с описанием движения жидкостей со свободной поверхностью, считаются те, при которых амплитуда отклонения поверхности от ее невозмущенного состояния является малой по сравнению с характерной длиной волны. Наличие в задаче малого параметра позволяет использовать теорию возмущений для описания динамики границы. Понятно, что в результате развития аperiodической неустойчивости поверхности это условие нарушается. На стадии формирования острий и пузырей описывать поведение системы можно лишь в рамках нелинейных моделей.

В настоящее время не существует общего подхода к решению нелинейных уравнений движения жидкостей со свободной границей. Так, более чем за полтора века исследований волн на поверхности жидкости в поле тяжести не удалось найти нетривиальных решений соответствующих уравнений движения. Как нам удалось показать, добавление в рассмотрение электрического поля не только не усложняет уравнения, а, напротив, делает их более симметричными, что в ряде случаев позволяет найти их точные решения.

Существенный прогресс в аналитическом исследовании волн произвольной амплитуды может быть достигнут в пределе сильного внешнего поля, когда влияние капиллярных и гравитационных сил относительно мало. В этом случае, как оказывается, возможна реализация особого режима движения жидкостей, для которого гармонические потенциалы скорости и электрического поля линейно связаны. Кратко опишем несколько задач, для которых использование подобной редукции оказывается эффективным. Первая задача касается динамики развития неустойчивости свободной поверхности жидкого гелия, заряженной локализованными над ней электронами. Было обнаружено, что в случае, когда заряд полностью экранирует электрическое поле над поверхностью, а его величина существенно превышает пороговое для неустойчивости значение, поведение системы описывается известными уравнениями лапласовского роста. Их интегрируемость позволяет описать эволюцию границы вплоть до формирования на ней особенностей - точек заострения, в которых бесконечными оказываются напряженность электрического поля, скорость движения жидкости и кривизна ее поверхности.

Во второй задаче рассматривается динамика поверхности раздела двух идеальных диэлектрических жидкостей в вертикальном электрическом поле. В ситуации, когда отношение плотностей жидкостей совпадает с обратным отношением их проницаемостей, удается редуцировать исходные уравнения движения к уравнениям, описывающим только нарастающие со временем решения. Примечательно, что редуцированные уравнения сводятся к уравнениям лапласовского роста в пределе малого отношения плотностей жидкостей.

Наконец, третья задача касается эволюции поверхности идеальной диэлектрической жидкости со значительной проницаемостью в тангенциальном электрическом поле. Для нее показано, что волны произвольной геометрии могут распространяться без искажений в направлении, либо против направления внешнего электрического поля; при этом амплитуда волн не влияет на их скорость. Также удается описать взаимодействие встречных пространственно локализованных волн малой, но конечной амплитуды. Важно, что во всех указанных ситуациях редуцирование возможно в общем (трехмерном) случае, причем в большинстве ситуаций редуцированные уравнения допускают точное решение.

Опишем теперь прогресс, которого удалось достичь при рассмотрении классической задачи электростатики – задачи о нахождении равновесной формы свободной поверхности проводящей жидкости в электрическом поле. Эффективным подходом к этой проблеме в плоской постановке оказывается использование конформного преобразования области вне жидкости в каноническую область (полуплоскость, круг, либо полосу). Возможность решения уравнения Лапласа в этой области позволяет свести исходную задачу в частных производных с неизвестной границей к единственному нелинейному интегро-дифференциальному уравнению, соответствующему условию баланса капиллярных и электростатических сил на границе в конформных переменных. Решение этого уравнения требует использования разных подходов для двух различных с физической точки зрения ситуаций: когда жидкость имеет собственный электрический заряд и когда весь заряд индуцируется внешним полем. В первом случае задачу удастся решить, используя гипотезу о том, что решения для различных параметров (величины заряда и поверхностного натяжения) связаны нелинейным уравнением Риккати общего вида. Во втором случае несколько классов точных решений найдены с использованием предположения, что степенное разложение отображающей функции имеет лишь конечное число слагаемых.

Для всех полученных решений характерно, что при превышении электрическим полем некоторого порогового значения занятая жидкостью область теряет односвязность, что соответствует отрыву капель от основной массы жидкости (либо, для некоторых случаев, формированию пузырьков). Это позволяет сформулировать критерии существования структур на заряженной поверхности проводящей жидкости. Если они нарушаются, то баланс капиллярных и электростатических сил невозможен, и происходит взрывной рост возмущений границы.

В совокупности, полученные результаты закладывают основу нелинейной теории электрогидродинамических явлений в жидкостях со свободной границей.